Etude et graphique de :

$$\rho = a\,\frac{\theta}{\theta^2-1} \qquad a>0$$

* $\rho(\theta)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. Etant impaire, on fera l'étude pour $t\in[0,+\infty[\setminus\{1\}$ puis on complètera par symétrie /à Oy.

* $\rho' = -a\,\dfrac{1+\theta^2}{(\theta^2-1)^2} < 0$

θ	0		1		$+\infty$
ρ'		$-$	‖	$-$	
ρ	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

* Branche infinie en $\theta=1$:

$\lim\limits_{\theta\to 1}\rho(\theta)=\pm\infty$ montre que la droite $\theta=1$ (NB : 1rd ≃ 57°) est direction asymptotique de la courbe pour $\theta\to 1$.

$$\rho\sin(\theta-1) = a\,\frac{\theta\sin(\theta-1)}{\theta^2-1} \to \frac{a}{2} \qquad (\theta\to 1)$$

montre que la courbe admet une asymptote pour $\theta\to 1$: la droite de direction $\theta=1$ et d'équation $Y=\frac{a}{2}$ dans le repère $\mathcal{R}_1 \doteq (0,\vec{u}_1,\vec{v}_1)$, où $\vec{u}_\theta \doteq \cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v}_\theta=\vec{u}_\theta'$.

* En $\theta=0$, $\rho=0$ et la tangente en $M(0)$ sera l'axe polaire : elle sera horizontale.

* $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=0$ donc O est un point-asymptote. La courbe s'enroule autour de O.

(Deug 1ʳᵉ année 93-94)

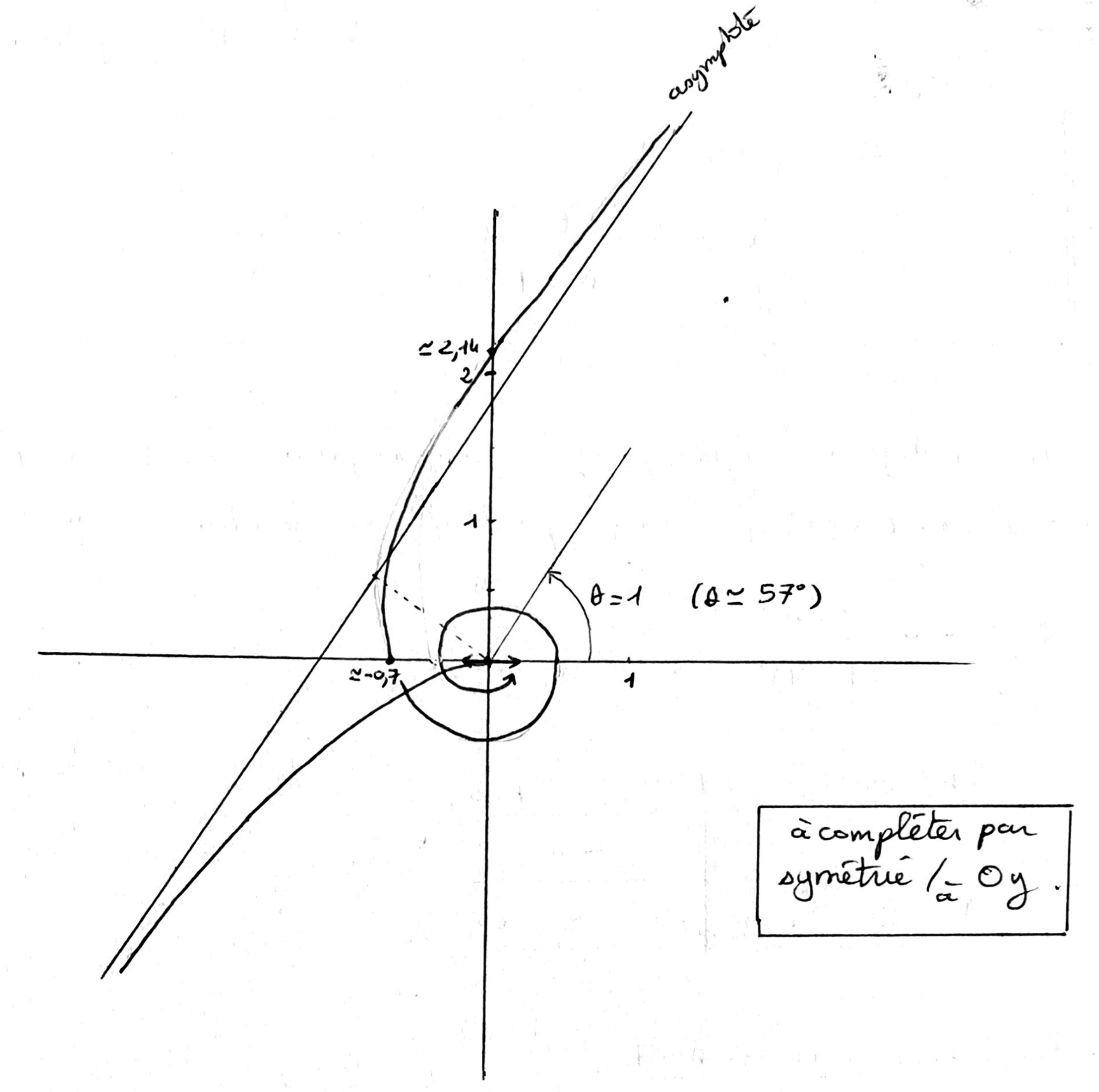


figure pour $a = 2$ $\begin{cases} \theta = \pi & \rho \simeq 0{,}7 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \rho \simeq 2{,}14 \end{cases}$

* Position de l'asymptote / à la courbe :

On travaille à nouveau dans le repère $(O, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ (où $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ ...)

Il faut étudier le signe de

$$\xi \doteq \rho \sin(\theta - 1) - \frac{a}{2} = a\,\frac{(h+1)\sin h}{h(h+2)} - \frac{a}{2} \quad \text{où } h \doteq \theta - 1$$

De $\frac{\sin h}{h} = 1 + o(h)$ et $\frac{h+1}{h+2} = \frac{1}{2}\,\frac{h+1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}(1+h)\left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{2} + o(h)\right)$

on déduit $\xi = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{h}{2} + o(h)\right)(1 + o(h)) - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}h + o(h)$

ξ sera donc du signe de $\frac{a}{4}h$, ie de h, lorsque h sera proche de 0.

Si $h \to 0_+$, $\xi > 0$ et si $h \to 0_-$, $\xi < 0$. La courbe sera donc sous l'asymptote si $\theta \to 1_-$ et dessus l'asymptote si $\theta \to 1_+$. FIN